1. Ważne granice

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a \tag{4}$$

Dowody

1. Oznaczmy przez $\alpha = \frac{1}{x}$. Wówczas gdy $x \to 0$ to $\alpha \to \pm\infty$. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$.
2. Z $\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$, ciągłości funkcji logarytmicznej oraz (1) znajdujemy pożądaną granicę.
3. Niech $a^x - 1 = \alpha$. Wówczas przy $x \to 0$ (na podstawie ciągłości funkcji wykładniczej) mamy także $\alpha \to 0$. Tak więc $x = \log_a(1+\alpha)$ i na mocy (2): $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\log_a(1+\alpha)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$.
4. Przyjmijmy $(1+x)^a - 1 = \alpha$. Przy $x \to 0$ (ze względu na ciągłość funkcji potęgowej) mamy $\alpha \to 0$. Logarytmując równość $(1+x)^a = 1+\alpha$ otrzymujemy, że: $a\ln(1+x) = \ln(1+\alpha)$, dzięki czemu możemy napisać: $\frac{(1+x)^a-1}{x} = \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}\cdot a\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}$ co po uwzględnieniu (2) dla ilorazów $\frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}$ oraz $\frac{\ln(1+x)}{x}$ (dążą do jedności) pozwala nam znaleźć granicę.

Uwaga: Granice 1-4 pozostają prawdziwe, jeżeli za x weźmiemy dowolną funkcję $\alpha(x)$ zbieżną do 0 gdy $x \to x_0$.

2. Chwyty

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$. W przypadku granic skończonych $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > 0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = B$ zachodzi związek

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} e^{\varphi(x)\ln f(x)} = e^{B\ln A} = A^B$$

Jeżeli $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ oraz $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, to korzystając z (1) i ciągłości funkcji wykładniczej, można zastosować następujące przekształcenie:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}[1+(f(x)-1)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{\varphi(x)(f(x)-1)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)(f(x)-1)}$$

Przykład:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} = \sqrt{ab}$$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$. Jeżeli znamy jakieś granice ilorazów funkcji również przy $x \to a$, w których występuje $f(x)$ lub $g(x)$, pomocne może się okazać pomnożenie i podzielenie przez tą drugą część pod granicą. *Przykład:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\frac{x^2}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2} = 4\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{(\frac{x}{2})^2}{x^2} = -2$$

3. Nieskończenie małe

Funkcja $\alpha(x)$ nazywa się *nieskończenie małą* gdy $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Analogicznie określa się nieskończenie małą funkcję gdy $x\to\infty$. Funkcje nieskończenie małe mają następujące własności:

1. Suma i iloczyn dowolnej, skończonej ilości funkcji nieskończenie małych jest także nieskończenie małą.
2. Iloczyn funkcji nieskończenie małej i funkcji ograniczonej jest funkcją nieskończenie małą.

Niech funkcje $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ będą nieskończenie małe gdy $x\to a$ i niech

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$$

Jeżeli $c=0$, to funkcja $\alpha(x)$ nazywa się nieskończenie małą *wyższego rzędu* w porównaniu z $\beta(x)$, zaś $\beta(x)$ - nieskończenie małą *niższego rzędu* w porównaniu z $\alpha(x)$, co zapisujemy

$$\alpha(x)=o(\beta(x))$$

Jeżeli $c\in\mathbb{R}_+$ to funkcje $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ nazywają się nieskończenie małymi *tego samego rzędu*.

Jeżeli $c=1$, to funkcje $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ nazywają się *równoważnymi*, co zapisujemy $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Jeżeli $c=\pm\infty$ zachodzi sytuacja odwrotna do $c=0$.

Gdy nie istnieje powyższa granica, mówimy że nieskończenie małe funkcje są *nieporównywalne*.

Jeżeli $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)^n}=c$, gdzie $0<|c|<\infty$, to funkcja $\alpha(x)$ nazywa się nieskończenie małą *n-tego rzędu* w porównaniu z funkcją $\beta(x)$.

Jeżeli funkcje $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ są nieskończenie małe dla $x\to a$, i jeżeli $\alpha(x)\sim\gamma(x)$, $\beta(x)\sim\delta(x)$, to

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}\qquad(\textit{zasada zamiany równoważnych})$$

Jeżeli $\lim\limits_{x\to a}f(x)=k$, $0<|k|<\infty$, to

$$f(x)\alpha(x)\sim k\alpha(x)$$

Jeżeli $\alpha(x)\sim\gamma(x)$ i $\beta(x)\sim\gamma(x)$, to $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Na to, aby dwie nieskończenie małe funkcje były równoważne, potrzeba i wystarcza, by ich różnica była nieskończenie małą wyższego rzędu w porównaniu z każdą z nich.

Nieskończenie małe równoważne przy $x\to 0$:

$$\sin\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\ln(1+\alpha(x))\sim\tfrac{1}{p}[(1+\alpha(x))^p-1]\sim e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$$

Przykłady:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}(2x^2))}=\frac{1}{2},\quad\text{bo}\quad\begin{cases}e^{\sin^2 x}-1\sim\sin^2 x\sim x^2\\ \ln(1+\operatorname{tg}(2x^2))\sim\operatorname{tg}(2x^2)\sim 2x^2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\ln(1+3x)}{(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\cdot 3x}{x\cdot 5\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{5},\quad\text{bo}\quad\begin{cases}\sin\sqrt[3]{x}\sim\sqrt[3]{x}\\ \ln(1+3x)\sim 3x\\ \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\sim\sqrt{x}\\ e^{5\sqrt[3]{x}}-1\sim 5\sqrt[3]{x}\end{cases}$$

Przykład (de l'Hospital):

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}\cdot\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\underset{[\frac{0}{0}]}{\overset{\mathrm{H}}{=}}e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{1}{2}e$$

4. Lokalny wzór Taylora

Lokalnym wzorem Taylora (lub *wzorem Taylora z resztą w postaci Peano*) nazywamy wzór:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Dla $a = 0$ otrzymujemy *wzór Maclaurina z resztą w postaci Peano.*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Z lokalnego wzoru Taylora wynika, że zastępując dla $x \to a$ funkcję $f(x)$ w otoczeniu punktu a wielomianem Taylora n-tego stopnia, popełniamy błąd będący nieskończenie małą wyższego rzędu niż $(x-a)^n$.

W obliczeniach najczęściej jest stosowanych pięć podstawowych rozkładów

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a^{\underline{2}}}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a^{\underline{n}}}{n!}x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{aligned}$$

gdzie $a^{\underline{n}} = \underbrace{a(a-1)\ldots(a-n+1)}_{n}$ i czytamy to: a dolna silnia n.

Przykład:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^4)}{3x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^3)\right)^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^3)\right)^{\frac{1}{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^3)}}\right)^{\frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^3)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^3)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{3}{2} + o(x)} = e^{-\frac{3}{2}}$$

Przykład (nieskończenie małe):

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{x}} - e^2}{x} = e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)-2} - 1}{x} = e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)}{x} - 2} - 1}{x} =$$

$$= e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x+o(x)} - 1}{-2x + o(x)} \cdot \frac{-2x + o(x)}{x} = -2e^2$$

Literatura

[1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Tom I, PWN, Warszawa 1976

[2] I. A. Maron, *Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego: Funkcje jednej zmiennej*, WNT, Warszawa 1974